Über die Abgrenzung der Wurzeln von algebraischen Gleichungen.

Von STEPHAN LIPKA in Szeged.

§ 1.

Der Ausgangspunkt unserer Arbeit ist der folgende wohlbekannte Satz von CAUCHY. *Ist*

$$(1) \qquad f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n \qquad (a_n \neq 0)$$

eine algebraische Gleichung n-ten Grades, worin die Koeffizienten irgendwelche komplexe Zahlen sind, so liegen alle Wurzeln der Gleichung in dem mit dem Radius

$$(2) \qquad 1 + \frac{\text{Max.}(|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{n-1}|)}{|a_n|}$$

um den Nullpunkt beschriebenen Kreise.

Der Satz lässt sich in folgender speziellerer Form aussprechen: *Alle Wurzeln der Gleichung* (1) *liegen in dem mit dem Radius*

$$(2') \qquad 1 + \frac{|a_0| + |a_1| + \ldots + |a_{n-1}|}{|a_n|}$$

um den Nullpunkt beschriebenen Kreise.

Man benützt in der letzteren Formel alle Koeffizienten der Gleichung (1). Es erhebt sich das Problem, ob es immer nötig ist, dass in der Formel (2′) alle Koeffizienten auftreten? Ich beweise im Folgenden zuerst, dass wenn gewisse Wurzeln der Gleichung vom Nullpunkte genügend weit entfernt sind, zur Abgrenzung aller Wurzeln die Benützung aller Koeffizienten nicht nötig ist, sondern aus Formel (2′) gewisse Koeffizienten weggelassen werden können. Es gilt nämlich der folgende

Satz I. *Es sei k eine ganze Zahl:*

$$1 \leqq k < n$$

Wenn von den Wurzeln der Gleichung (1) *mindestens* $n-k$ *sich im Äusseren des mit dem Radius*

$$\frac{1}{\sqrt[n-k-1]{2}-1}$$

beschriebenen Kreises oder auf seiner Peripherie befinden, so liegen alle Wurzeln im Innern des Kreises

$$|z|<1+\frac{|a_0|+|a_1|+\ldots+|a_k|}{|a_n|}.$$

Zum Beweise des Satzes benützen wir das folgende

Lemma: es sei

$$\varphi_\nu(x)=x^\nu-\binom{\mu}{1}x^{\nu-1}-\binom{\mu}{2}x^{\nu-2}-\ldots-\binom{\mu}{\nu},$$

worin μ *eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet, und* $\nu=1,2,3,\ldots,\mu$. *Ich behaupte dass für alle positiven Werte von* x, *für welche*

$$x\geqq\frac{1}{\sqrt[\mu]{2}-1}$$

ist, die folgende Ungleichung gilt:

$$\varphi_\nu(x)\geqq 0 \qquad (\nu=1,2,\ldots,\mu)$$

Beweis. Die Gleichung $\varphi_\nu(x)=0$ hat eine einzige positive Wurzel, diese bezeichnen wir mit ξ_ν. Dann folgt, dass

(3) $$\varphi_\nu(x)<0$$

wenn $$0\leqq x<\xi_\nu$$

und

(3′) $$\varphi_\nu(x)\geqq 0$$

wenn $$x\geqq\xi_\nu$$

ist, zufolge der Ungleichungen: $\varphi_\nu(0)<0$, $\varphi_\nu(+\infty)>0$. Ferner bekommen wir nach der Formel

$$\varphi_\nu(x)=x\,\varphi_{\nu-1}(x)-\binom{\mu}{\nu}$$

dass

$$\varphi_\nu(\xi_{\nu-1})=-\binom{\mu}{\nu}<0$$

ist, woraus nach (3)

$$\xi_\nu>\xi_{\nu-1}$$

folgt. Somit gilt

(3″) $$\xi_\mu>\xi_{\mu-1}>\ldots>\xi_1.$$

Da aber

$$\varphi_\mu(x) = x^\mu - \binom{\mu}{1} x^{\mu-1} - \ldots - \binom{\mu}{\mu} = 2x^\mu - (x+1)^\mu$$

ist, ergibt sich

$$\xi_\mu = \frac{1}{\sqrt[\mu]{2} - 1}$$

woraus nach (3″) und (3′) die Richtigkeit unseres Lemmas folgt.

Bezeichnen wir nun die Wurzeln der Gleichung (1) mit $z_1, z_2, \ldots, z_n$ so, dass

$$|z_1| \leqq |z_2| \leqq \ldots \leqq |z_n|,$$

dann besteht nach der Voraussetzung des Satzes

$$\frac{1}{\sqrt[n-k-1]{2} - 1} \leqq |z_{k+1}| \leqq |z_{k+2}| \leqq \ldots \leqq |z_n| \tag{4}$$

Schreiben wir $f(z)$ in der Form

$$f(z) = g(z) \, . \, h(z)$$

wo

$$g(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_k)(z - z_n) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \ldots + \alpha_{k+1} z^{k+1}$$

und

$$h(z) = (z - z_{k+1})(z - z_{k+2}) \ldots (z - z_{n-1}) = \beta_0 + \beta_1 z + \ldots + z^{n-k-1};$$

dabei ist:

$$\begin{aligned} \beta_0 &= z_{k+1} \, . \, z_{k+2} \ldots z_{n-1} \\ \beta_1 &= z_{k+1} \, . \, z_{k+2} \ldots z_{n-2} + \ldots \\ &\vdots \\ \beta_{n-k-1} &= 1 \end{aligned} \tag{5}$$

ferner

$$a_\nu = \alpha_\nu \beta_0 + \alpha_{\nu-1} \beta_1 + \ldots + \alpha_0 \beta_\nu \tag{6}$$

worin

$$\alpha_\nu = 0 \qquad \text{wenn } \nu > k+1$$

und

$$\beta_\nu = 0 \qquad \text{wenn } \nu > n-k-1$$

ist.

Wir wollen nachweisen, dass für die Koeffizienten β_ν folgende Beziehung besteht

$$|\beta_0| - |\beta_1| - |\beta_2| - \ldots - |\beta_\nu| \geqq 0 \tag{7}$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots, n-k-1).$$

Da $a_0 \neq 0$ und nach (5) $\beta_0 \neq 0$ ist, lässt sich die Ungleichung in folgender Form schreiben

$$|\beta_0|\left(1-\left|\frac{\beta_1}{\beta_0}\right|-\left|\frac{\beta_2}{\beta_0}\right|-\ldots\left|\frac{\beta_\nu}{\beta_0}\right|\right)\geqq 0$$

hierin ist nach (5)

$$\left|\frac{\beta_\nu}{\beta_0}\right|=\left|\frac{\sum z_{k+1}\,.\,z_{k+2}\ldots z_{n-\nu-1}}{z_{k+1}z_{k+2}\ldots z_{n-1}}\right|$$

worin im Zähler die Summe der aus den Elementen $z_{k+1}, z_{k+2}, \ldots, z_{n-1}$ gebildeten Kombinationen $n-k-\nu-1$-ter Klasse steht, daher

$$\left|\frac{\beta_\nu}{\beta_0}\right|\leqq\frac{1}{\sum|z_{k+1}z_{k+2}\ldots z_{k+\nu}|}$$

und wenn

(8) $$|z_{k+1}|=\xi$$

dann wird

$$\left|\frac{\beta_\nu}{\beta_0}\right|\leqq\binom{n-k-1}{\nu}\frac{1}{\xi^\nu}$$

daraus folgt, dass

$$1-\left|\frac{\beta_1}{\beta_0}\right|-\left|\frac{\beta_2}{\beta_0}\right|-\ldots-\left|\frac{\beta_\nu}{\beta_0}\right|\geqq$$

$$\geqq 1-\binom{n-k-1}{1}\frac{1}{\xi}-\binom{n-k-1}{2}\frac{1}{\xi^2}-\ldots-\binom{n-k-1}{\nu}\frac{1}{\xi^\nu}=$$

$$=\frac{\xi^\nu-\binom{n-k-1}{1}\xi^{\nu-1}-\binom{n-k-1}{1}\xi^{\nu-2}-\ldots-\binom{n-k-1}{\nu}}{\xi^\nu}$$

woraus nach (4) und (8) laut des Lemma's die Richtigkeit der Behauptung (7) folgt. Wir bestimmen mit deren Hilfe eine zwischen den α_ν und a_ν bestehende Beziehung, nämlich

(9) $$\text{Max.}\,(|\alpha_0|, |\alpha_1|, \ldots, |\alpha_k|)\leqq|a_0|+|a_1|+\ldots+|a_k|=A.$$

Um dies zu beweisen schreiben wir die nach (6) gültigen Ungleichungen

$$\begin{aligned}|\alpha_0\beta_0|&=|a_0|\\|\alpha_1\beta_0|-|\alpha_0\beta_1|&\leqq|a_1|\\|\alpha_2\beta_0|-|\alpha_1\beta_1|-|\alpha_0\beta_2|&\leqq|a_2|\\&\;\vdots\\|\alpha_\nu\beta_0|-\ldots-|\alpha_2\beta_{\nu-2}|-|\alpha_1\beta_{\nu-1}|-|\alpha_0\beta_\nu|&\leqq|a_\nu|\,;\end{aligned}$$

durch Addition ergibt sich:

$$|\alpha_\nu|\,|\beta_0|+|\alpha_{\nu-1}|\,(|\beta_0|-\beta_1|)+$$
$$+|\alpha_{\nu-2}|\,(|\beta_0|-|\beta_1|-|\beta_2|)+\ldots+|\alpha_0|\,(|\beta_0|-|\beta_1|-\ldots-|\beta_\nu|)$$
$$\leqq|a_0|+|a_1|+\ldots+|a_\nu|$$

woraus nach (4) und (7)

$$|\alpha_\nu|\leqq|a_0|+|a_1|+\ldots+|a_\nu|\leqq A$$

folgt.

Nach (2) sind alle Wurzeln von $g(z)=0$ und also auch die von $f(z)=0$ im Innern des Kreises

$$|z|<1+\frac{\text{Max.}\,(|\alpha_0|,|\alpha_1|,\ldots,|\alpha_k|)}{|\alpha_{k+1}|}$$

enthalten.

Da aber $\alpha_{k+1}=a_n$, so folgt nach (9), dass

$$1+\frac{\text{Max.}\,(|\alpha_0|,|\alpha_1|,\ldots,|\alpha_k|)}{|\alpha_{k+1}|}\leqq 1+\frac{|a_0|+|a_1|+\ldots+|a_k|}{|a_n|}$$

w. z. b. w.

Mit Hilfe des ersten Satzes beweisen wird den folgenden.

Satz II. *Die Gleichung* (1) *hat mindestens* $k+1$ *Wurzeln im Innern des Kreises vom Radius*

$$\varrho=\text{Max.}\left(\frac{1}{\sqrt[n-k-1]{2}-1},\ 1+\frac{|a_0|+|a_1|+\ldots+|a_k|}{|a_n|}\right),$$

worin $0\leqq k<n.$

Beweis. Wir unterscheiden zwei Fälle:

Erster Fall. Es liegen mindestens $n-k$ der Wurzeln im Äusseren des Kreises

$$|z|=\frac{1}{\sqrt[n-k-1]{2}-1}$$

oder auf seinem Rand.

Dann liegen nach Satz I alle Wurzeln in dem Kreise

$$|z|<1+\frac{|a_0|+|a_1|+\ldots+|a_k|}{|a_n|}=\text{Max.}\left(\frac{1}{\sqrt[n-k-1]{2}-1},\ 1+\frac{|a_0|+\ldots+|a_k|}{|a_n|}\right)$$

Zweiter Fall. Es liegen höchstens $n-k-1$ Wurzeln im Äusseren des Kreises

$$|z|=\frac{1}{\sqrt[n-k-1]{2}-1}$$

oder auf seinem Rand.

In diesem Falle liegen mindestens $k+1$ Wurzeln im Kreis

$$|z|<\frac{1}{\sqrt[n-k-1]{2}-1}$$

und da

$$\varrho=\text{Max.}\left(\frac{1}{\sqrt[n-k-1]{2}-1},\ 1+\frac{|a_0|+\ldots+|a_k|}{|a_n|}\right)$$

also wird auch der Kreis vom Radius ϱ mindestens $k+1$ Wurzeln enthalten, womit der Satz II bewiesen ist.

Wenn wir im Satz II speziell $k=n-2$ setzen, erhalten wir den folgenden Satz von Herrn Fekete, nämlich, dass *die Gleichung* (1) *im Kreise*

$$|z|<1+\frac{|a_0|+|a_1|+\ldots+|a_{n-2}|}{|a_n|}$$

mindestens $n-1$ *Wurzeln besitzt.*[1])

§ 2.

Die Wurzeln der Gleichung $f(z)$ bezeichnen wir wieder mit $z_1, z_2, \ldots z_n$, so dass

$$|z_1|\leqq|z_2|\leqq\ldots\leqq|z_n|.$$

Bedeute q einen *positiven Parameter,* für welchen

$$(10)\qquad 0<\frac{1}{q}\leqq|z_n|.$$

Bilden wir die folgenden Summen

$$(10')\qquad S_\mu^{(2)}=\sum_{i=1}^{\mu} q^i \qquad \mu=1,2,\ldots,n-2$$

und daraus

$$S_\mu^{(3)}=\sum_{i=1}^{\mu} S_{\mu-i+1}^{(2)}\cdot q^i \qquad \mu=1,2,\ldots,n-3.$$

Sei im allgemeinen

$$(10'')\qquad S_\mu^{(\nu+1)}=\sum_{i=1}^{\mu} S_{\mu-i+1}^{(\nu)}\cdot q^i \qquad \mu=1,2,\ldots,n-\nu-1.$$

Es gilt der folgende

Satz III. *Die Gleichung* $f(z)=0$ *hat mindestens* $k+1$ *Wurzeln im Kreis*

$$|z|<1+\frac{|a_0|\,S_{k+1}^{(n-k-1)}+|a_1|\,S_k^{(n-k-1)}+\ldots+|a_k|\,S_1^{(n-k-1)}}{|a_n|}$$

$$(k=0,1,2,\ldots,n-3).$$

Zuerst beweisen wir den Satz für $k=n-3$.

Sei $\qquad f(z)=(z-z_n)\,\varphi(z)$

wo $\qquad \varphi(z)=b_0+b_1z+\ldots+b_{n-1}z^{n-1}.$

Wenn $|z_n|\geqq 1$, so ist, wie wir behaupten,

---

1) Diesen Satz entnehme ich einer mündlicher Mitteilung von Herrn Fekete.

(11) $\quad \text{Max.}\,(|b_0|, |b_1|, \ldots, |b_{n-2}|) \leqq |a_0| + |a_1| + \ldots + |a_{n-2}|.$

Es besteht nämlich

(12) $$a_\nu = b_{\nu-1} - z_n b_\nu$$

wo $b_\nu = 0$ für $\nu < 0$ und für $\nu > n-1$, nach (12)

$$\begin{aligned} |z_n b_0| &= |a_0| \\ |z_n b_1| - |b_0| &\leqq |a_1| \\ &\vdots \\ |z_n b_\nu| - |b_{\nu-1}| &\leqq |a_\nu|. \end{aligned}$$

Aus den letzten Ungleichungen folgt

$$|b_0|(|z_n|-1) + |b_1|(|z_n|-1) + \ldots + |b_{\nu-1}|(|z_n|-1) + |z_n||b_\nu| \leqq$$
$$\leqq |a_0| + |a_1| + \ldots + |a_\nu|.$$

Hier ist die linke Seite nicht kleiner als $|b_\nu|$, da $|z_n| \geqq 1$. Daraus folgt die Richtigkeit von (11)

Es sei nun

$$f(z) = (z - z_n)(z - z_{n-1})\,\psi(z)$$

wo

$$\psi(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_{n-2} z^{n-2}$$
$$\varphi(z) = b_0 + b_1 z + \ldots + b_{n-1} z^{n-1} = (z - z_{n-1})\,\psi(z)$$

Wenn $|z_{n-1}| \geqq 1$, so ist laut (11)

$$\text{Max.}\,(|c_0|, |c_1|, \ldots, |c_{n-3}|) \leqq |b_0| + |b_1| + \ldots + |b_{n-3}|.$$

Daraus folgt laut des erwähnten Cauchyschen Satzes

$$|z_{n-2}| < 1 + \frac{\text{Max.}\,(|c_0|, \ldots, |c_{n-3}|)}{|c_{n-2}|} \leqq 1 + \frac{|b_0| + \ldots + |b_{n-3}|}{|a_n|}$$

oder wenn wir

$$R = |b_0| + |b_1| + \ldots + |b_{n-3}|$$

setzen

(13) $$|z_{n-2}| < 1 + \frac{R}{|a_n|}$$

Um den Wert von R zu berechnen, bemerken wir, dass

(14) $$b_\nu = -\,\frac{a_0 + z_n a_1 + z_n^2 a_2 + \ldots + z_n^\nu a_\nu}{z_n^{\nu+1}}$$

also

$$R = \sum_{\nu=0}^{n-3} \frac{|a_0 + z_n a_1 + \ldots + z_n^\nu a_\nu|}{|z_n|^{\nu+1}}$$
$$\leqq |a_0| \sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{|z_n|^i} + |a_1| \sum_{i=1}^{n-3} \frac{1}{|z_n|^i} + \ldots + |a_{n-3}| \frac{1}{|z_n|}.$$

Mit Berücksichtigung von (10) und (10′) ergibt sich

$$R \leqq |a_0|\, S_{n-2}^{(2)} + |a_1|\, S_{n-3}^{(2)} + \ldots + |a_{n-3}|\, S_1^{(2)} = R'$$

also zufolge (13)

$$|z_{n-2}| < 1 + \frac{R'}{|a_n|}.$$

Damit ist unser Satz für $k+1 = n-2$ bewiesen.

Unter der Voraussetzung, dass der Satz für $k+1 = n-\nu$ gilt, beweisen wir denselben für $k+1 = n-(\nu+1)$. Sei

$$f(z) = (z-z_n)\, g(z)$$
$$g(z) = b_0 + b_1 z + \ldots + b_{n-1} z^{n-1}.$$

Den Satz III, der nach unserer Annahme für $k = n-\nu$ gilt, auf $g(z) = 0$ anwendend, erhalten wir

$$|z_{n-1-\nu}| < 1 + \frac{|b_0|\, S_{n-\nu-1}^{(\nu)} + |b_1|\, S_{n-\nu-2}^{(\nu)} + \ldots + |b_{n-\nu-2}|\, S_1^{(\nu)}}{|a_n|}.$$

Da $q \geqq \frac{1}{|z_n|}$, folgt aus (14)

$$|b_\nu| \leqq |a_0|\, q^{\nu+1} + |a_1|\, q^{\nu} + \ldots + |a_\nu|\, q.$$

Aus der letzten Beziehung und aus (10″) folgt nun

$$|z_{n-1-\nu}| < 1 + \frac{|a_0|\, S_{n-\nu-1}^{(\nu+1)} + |a_1|\, S_{n-\nu-2}^{(\nu+1)} + \ldots + |a_{n-\nu-2}|\, S_1^{(\nu+1)}}{|a_n|}$$

w. z. b. w.

Als Beispiel erwähnen wir den Fall $q = 1$, für welchen unserer Satz offenbar gilt. In diesem Fall haben wir

$$S_i^{(n-k-1)} = \binom{n-k-3+i}{n-k-2};$$

diese sind die *figurierten Zahlen* $(n-k-2)$-ter Ordnung.

Szeged, den 1. November 1926.

(Eingegangen am 2. November 1926.)